Formulaire* BECV 1

Roulley Emeric

I) Calculs élémentaires

Simple distributivité : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a(b+c) = ab+ac$.
Double distributivité : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.
Identités remarquables : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
- $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Calculs de fractions :

- **Formule de simplification :** $\forall a \in \mathbb{R}, \forall (b,c) \in (\mathbb{R}^*)^2, \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ $(\star)$.
- **Addition/soustraction :** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall c \in \mathbb{R}^*, \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$
  ⚠On se ramène toujours à cette formule en mettant au même dénominateur en utilisant la formule $(\star)$.
- **Multiplication :** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c,d) \in (\mathbb{R}^*)^2, \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$.
- **Division :** $\forall a \in \mathbb{R}, \forall (b,c,d) \in (\mathbb{R}^*)^3, \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc}$.

Calculs de racines : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
Calculs de puissances : Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a :

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- $a^m a^n = a^{m+n}$.
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{mn}$.
- $(ab)^m = a^m b^m$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.
- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Rappel : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

II) Généralités sur les fonctions et les polynômes

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

- On dit que f est paire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. Cette propriété se traduit par une symétrie axiale, d'axe l'axe des ordonnées, du graphe de la fonction f.
- On dit que f est impaire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. Cette propriété se traduit par une symétrie centrale, de centre l'origine du repère, du graphe de la fonction f.
- On dit que f est polynomiale si il existe des coefficients réels $a_0, a_1, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ tels que $a_n \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
  n est appelé le degré de f.
- On suppose que f est une fonction polynomiale. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de f si $f(\alpha) = 0$.

Propriétés des fonctions polynomiales :

- Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les même coefficients.
- On suppose que f est une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Alors α est une racine de f $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-\alpha)g(x)$ avec g une fonction polynomiale de degré $(n-1)$.

* ⚠Ce formulaire n'est qu'un support de révision. Il n'est pas exhaustif et donc ne doit pas constituer l'essentiel de vos révisions. L'auteur ne saura être tenu responsable d'une mauvaise utilisation de ce formulaire.

Cas des trinômes : C'est le cas où f est polynomiale de degré 2 : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2+bx+c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.
La courbe représentative de la fonction f est une parabole admettant un minimum (resp. un maximum) si $a > 0$ (resp. si $a < 0$).
Le discriminant de f est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	2 racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 racine réelle double $x_0 = \frac{-b}{2a}$	2 racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Factorisation	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-x_0)^2$	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-z_1)(x-z_2)$

Le tableau de signe de f se déduit de sa forme factorisée (sur $\mathbb{R}$) via un tableau de signe.
Calculs de limites : Le passage à la limite est compatible avec les opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division, composition).
Il existe seulement 4 formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \tfrac{\infty}{\infty}, \quad \tfrac{0}{0}.$$

Pour lever une indétermination, il existe essentiellement 2 méthodes : la factorisation et l'expression conjuguée.
Il existe deux théorèmes principaux (et leurs variantes) pour déterminer des limites particulières :

Théorème de comparaison : $\left(u(x) \leqslant v(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty.$

Théorèmes des gendarmes : $\left(u(x) \leqslant v(x) \leqslant w(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = l\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l.$

III) Dérivation :

Équation de la tangente : L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est : $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$
Ainsi $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
Formules de dérivation :

Fonction	Dérivée
kU	kU'
$U+V$	$U'+V'$
UV	$U'V+V'U$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V-V'U}{V^2}$
$V \circ U$	$U' \times V' \circ U$

Rappel : $V \circ U(x) = V(U(x))$ appelée composition de la fonction U par la fonction V.
Dérivation des fonctions fondamentales :

Fonction	Dérivée
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

IV) Exponentielle et logarithme

exp	ln
strictement croissante sur $\mathbb{R}$	strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$
$e^0 = 1$	$\ln(1) = 0$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y$	$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^n = e^{nx}$	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^n) = n\ln(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$

V) Intégration :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(f,g) \in (\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}))^2$ ($\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions continues sur* $[a,b]$).
Primitives : F est une primitive de f sur $[a,b]$ si $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$.
Toutes les primitives de f sont égales à une constante près.
Calcul d'une intégrale : Pour toute primitive F de f, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b$.
Le calcul basique d'une intégrale s'effectue donc en identifiant une primitive de l'intégrande au moyen de la formule de dérivation d'une composée.
Interprétation graphique de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire (comptée algébriquement) comprise entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Propriétés de l'intégrale :

- **Linéarité :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- **Croissance :** $f \leqslant g$ sur $[a,b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.
- **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Intégration par parties : Pour tout $(u,v) \in (\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}))^2$, on a : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.
($\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions dérivables sur* $]a,b[$ *et dont la dérivée est continue sur* $[a,b]$).

VI) Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Soit I un intervalle réel non-trivial. Soit $(a,b) \in (\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}))^2$. On considère l'équation suivante d'inconnue une fonction $y \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$:

$$(1) : \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

et l'équation homogène qui lui est associée :

$$(1') : \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Si l'on note A une primitive de a sur I, alors l'ensemble des solutions de $(1')$ est

$$\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, toute solution y de (1) s'écrit $y : x \mapsto \widetilde{y}(x) + \lambda e^{-A(x)}$ où $\widetilde{y}$ est une solution particulière de (1).
Pour déterminer $\widetilde{y}$, on utilise la méthode de variation de la constante (rédaction à reproduire) :
On cherche une solution particulière $\widetilde{y}$ de (1) sous la forme $\widetilde{y}(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{y} \text{ est solution de (1)} &\Leftrightarrow \forall x \in I, \widetilde{y}'(x) + a(x)\widetilde{y}(x) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x)e^{-A(x)} + (-a(x))\lambda(x)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = b(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

On conclut que si λ est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ (que l'on doit expliciter si possible), alors $\widetilde{y}$ est une solution particulière de (1).
Remarque : En pratique, on cherche toujours à trouver une solution particulière évidente avant de mettre en œuvre la méthode de variation de la constante.